Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Gourdon
Beck Malick Peyré
Demailly
Dreveton
Isenmann P (dev 2)

I – Approximation par des polynômes

1. Approximation locale par des fonctions régulières [Gou]

Théorème 1.1 (Formule de Taylor - Young) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n. Soit $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe, alors lorsque $h \longrightarrow 0$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Remarque 1.2 Pour $n = 0$, on retrouve la définition de la dérivée de f en a.

Exemple 1.3

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Théorème 1.4 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Alors pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Exemple 1.5

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{tx}\,dt \quad \text{donc} \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

Application 1.6 e est irrationnel

2. Approximation uniforme de fonctions continues [Gou]

Définition 1.7 On appelle approximation de l'unité tout suite $(\rho_n)_n$ de $C_c^0(\mathbb{R})$ qui vérifie les conditions :

(i) $\|\rho_n\|_1 = 1$ (ii) $\forall \alpha > 0$, $\int_{|t|\geq\alpha} \rho_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Lemme 1.8 Soient $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $(\rho_n)_n$ une approximation de l'unité. Alors $(f * \rho_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1.9 On considère $(p_n)_n$ l'approximation de l'unité définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $p_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $a_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$. Alors, pour tout $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ nulle en dehors de $I = [-1/2, 1/2]$, $(f * p_n)_n$ est une suite de fonction polynomiales.

Théorème 1.10 (Weierstrass) Soient J un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors, f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

développement 1

Application 1.11 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$. Alors $f \equiv 0$.

3. Polynômes orthogonaux [BMP]

Définition 1.12 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que, pour tout n, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

Définition 1.13 On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à λ.

Proposition 1.14 L'espace $L^2(I,\rho)$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g}(x)\rho(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.15 Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$. Cette famille est appelée famille de polynômes orthogonaux.

Théorème 1.16 S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour $\|.\|_\rho$.

II - Approximation de fonctions périodiques

1. Propriétés hilbertiennes des séries de Fourier [Gou] [Dem]

Proposition 2.1 L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni de $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}$, est un espace de Hilbert.

Définition 2.2 Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n^e coefficient de Fourier de f, $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-inx}\, dx$.

Proposition 2.3 L'application $c_n : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire continue et si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Théorème 2.4 La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 2.5 Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ est la projection orthogonale de f sur P_n les polynômes trigonométriques de degré au plus n.

Proposition 2.6 (Égalité de Parseval) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors on a l'égalité suivante $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Application 2.7 Avec $f : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2. Convergence ponctuelle [BMP] [Gou]

Théorème 2.8 (Dirichlet) Soit $f \in \cancel{C^0(\mathbb{T}) \cap}\ C^1_m(\mathbb{T})$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a : $S_n(f)(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]$.

Corollaire 2.9 Soit $f \in C^0(\mathbb{T}) \cap C^1_m(\mathbb{T})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Contre-exemple 2.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et 2π-périodique telle que, $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$

alors :

f est continue mais la série de Fourier de f diverge en 0

Application 2.11 (Équation de la chaleur) Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ de coefficients de Fourier $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Il existe alors une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall t > 0$, $u(t, \cdot)$ 2π-périodique

(ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies et continues

(iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(iv) $u(t, \cdot) \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$

On obtient alors $u \in C^\infty$.

développement 2

III - Interpolation polynomiale [Dem]

1. Interpolation de Lagrange

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et on se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$.

Définition 3.1 On appelle i-ème polynôme élémentaire interpolateur de Lagrange aux points $x_0, \dots, x_n$: $l_i(X) := \prod_{j\neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$

Théorème 3.2 Le problème d'interpolation : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $p_n(x_i) = f(x_i)$ admet une unique solution donnée par : $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$.

Théorème 3.3 Supposons que f est $n+1$ dérivable sur $[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in\ ]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que : $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$ où $\pi_{n+1}(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Proposition 3.4 On a sous les hypothèses précédentes : $\|f - p_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$

2. Convergence et choix des points

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on se demande à quelles conditions sur f et/ou le choix des points $x_{0,n}, \dots, x_{n,n}$, on a convergence de p_n vers f uniformément.

Théorème 3.5 Si on a des points équidistants de pas constant $h := \frac{b-a}{n}$ et f est

$n+1$ dérivable sur $[a,b]$, alors : $\|f - p_n\|_\infty \leqslant \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$.

Exemple 3.6

phénomène de Runge : pour $f : x \in [-1,1] \longmapsto \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$ avec $\alpha > 0$, il n'y a pas convergence pour les points équidistants

Théorème 3.7 (admis) Si f est analytique donnée par une série entière de rayon R centrée en $\dfrac{a+b}{2}$. Alors, pour des points d'interpolation $x_{i,n}$ quelconques (resp. équidistants) et $\lambda = 1$ (resp. $\lambda = e$), les polynômes d'interpolation p_n aux points $x_{i,n}$ convergent uniformément vers f pourvu que $R > \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)(b-a)$.

Annexe

exemple 3.6